

変換された確率変数の期待値と分散

確率変数 X の母平均を μ ，母分散を σ^2 とする．2 回微分可能な関数 T によって X を Y に変換すると， $Y = T(X)$ の期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(T(X)) \doteq T(\mu) + \frac{1}{2}T''(\mu)\sigma^2 \\ V(Y) &= E((Y - E(Y))^2) \doteq [T'(\mu)]^2\sigma^2, \end{aligned}$$

と近似される．もし，確率変数 X の母分散 σ^2 が母平均 μ の関数として，

$$\sigma^2 = f(\mu)$$

のように表されるとしたら，上式は，

$$\begin{aligned} E(Y) &\doteq T(\mu) + \frac{1}{2}T''(\mu)f(\mu) \\ V(Y) &\doteq [T'(\mu)]^2f(\mu), \end{aligned}$$

となる．

分散安定化の変換

変換された確率変数 Y の分散が，平均の値によらず安定するためには， Y の分散について，

$$[T'(\mu)]^2f(\mu) = C, \quad (C \text{ は任意定数})$$

となるような関数 $T(\cdot)$ を探せばよく，この関数は，

$$T(X) = C \int \frac{dX}{\sqrt{f(X)}},$$

で与えられる．

状況	$\sigma^2 = f(\mu)$	$T(X)$	変換法
分散が平均に比例	$a\mu$	$T(X) = C \int \frac{dX}{\sqrt{aX}} \propto \int X^{-1/2} dX \propto \sqrt{X}$	平方根変換
分散が平均の 2 乗に比例 (標準偏差が平均に比例)	$a\mu^2$	$T(X) = C \int \frac{dX}{\sqrt{aX^2}} \propto \int X^{-1} dX \propto \log X$	対数変換
分散が平均の 4 乗に比例 (標準偏差の平方根が平均に比例)	$a\mu^4$	$T(X) = C \int \frac{dX}{\sqrt{aX^4}} \propto \int X^{-2} dX \propto \frac{1}{X}$	逆数変換
X が 2 項確率 μ の推定値	$\mu(1-\mu)/n$	$T(X) = C \int \frac{dX}{\sqrt{X(1-X)/n}} \propto 2 \arcsin \sqrt{X}$	逆正弦変換