

1 球面性の仮定

1.1 正規直交対比行列

平均値ベクトルを $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$, 係数ベクトルを $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_p)'$ とする.

平均値の線形結合 $C = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\mu} = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots + c_p\mu_p$ を対比 (contrast) と言う.

ex)

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + \mu_2 - (\mu_3 + \mu_4) .\end{aligned}$$

2つの対比 $C_i = \boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{\mu} = c_{i1}\mu_1 + c_{i2}\mu_2 + \dots + c_{ip}\mu_p$, $C_j = \boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{\mu} = c_{j1}\mu_1 + c_{j2}\mu_2 + \dots + c_{jp}\mu_p$ の係数が次の条件を満たすとき, C_i, C_j は直交対比 (orthogonal contrast) であると言う.

$$\boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{c}_j = c_{i1}c_{j1} + c_{i2}c_{j2} + \dots + c_{ip}c_{jp} = 0 .$$

ex)

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= (1)\mu_1 + (-1)\mu_2 + (0)\mu_3 + (0)\mu_4 \\ \mu_1 + \mu_2 - (\mu_3 + \mu_4) &= (1)\mu_1 + (1)\mu_2 + (-1)\mu_3 + (-1)\mu_4 \\ (1)(1) + (-1)(1) + (0)(-1) + (0)(-1) &= 0 .\end{aligned}$$

p 個の異なる平均値から構成される対比のうち, 互いに直交する対比は $p - 1$ 個だけ存在する.

p 個の異なる平均値から構成される $p - 1$ 個からなる直交対比は, 無数に存在する.

帰無仮説「 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$ 」は, $p - 1$ 個の直交対比がすべて 0 という仮説に置き換えることができる.

ex) 「 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ 」は, ある 3つの直交対比がすべて 0 という仮説に置き換えられる. 仮に,

$$\begin{aligned}(1) \quad \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ (2) \quad \mu_3 - \mu_4 &= 0 \\ (3) \quad \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} &= 0\end{aligned}$$

という直交対比を用いると, H_0 に含まれる任意の 2つの平均値が等しい (差が 0) という対比は,

$$\begin{aligned}\mu_1 - \mu_2 &= 0 & (1) \\ \mu_1 - \mu_3 &= 0 & ((1) - (2))/2 + (3) \\ \mu_1 - \mu_4 &= 0 & ((1) + (2))/2 + (3) \\ \mu_2 - \mu_3 &= 0 & ((1) + (2))/2 - (3) \\ \mu_2 - \mu_4 &= 0 & ((1) - (2))/2 - (3) \\ \mu_3 - \mu_4 &= 0 & (2)\end{aligned}$$

と構成することができ, (1)~(3) を検定すればよいことが分かる.

直交対比の係数ベクトルを並べた $(p-1) \times p$ 行列を直交対比行列 (orthogonal matrix) と言う.
ex)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ .5 & .5 & -.5 & -.5 \end{bmatrix}.$$

$(p-1) \times p$ の行列 $\mathbf{C} = [\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \dots, \mathbf{c}'_{p-1}]'$ が以下を満たすとき, $\mathbf{C}$ を正規直交対比行列 (orthonormal contrast matrix) と言う.

$$\mathbf{c}'_i \mathbf{c}_i = c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \dots + c_{ip}^2 = 1 \quad (\mathbf{C} \text{ の各行ベクトルの長さは } 1 \text{ である})$$

$$\mathbf{c}'_i \mathbf{c}_j = c_{i1}c_{j1} + c_{i2}c_{j2} + \dots + c_{ip}c_{jp} = 0 \quad (\mathbf{C} \text{ の相異なる行ベクトルは直交する})$$

$$\mathbf{c}'_i \mathbf{1} = c_{i1} + c_{i2} + \dots + c_{ip} = 0 \quad (\mathbf{C} \text{ の各行ベクトルの要素の和は } 0 \text{ である}).$$

行列表記で書くと,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{C}' &= \mathbf{I} \\ \mathbf{C}\mathbf{1} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{I}$ は単位行列, $\mathbf{1}$ は要素がすべて 1 のベクトル, $\mathbf{0}$ は要素がすべて 0 のベクトルである.
ex)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ .5 & .5 & -.5 & -.5 \end{bmatrix}.$$

なお, 正規直交対比行列は次のような性質を持つ.

$$\mathbf{C}'\mathbf{C} = \mathbf{I} - \frac{1}{p}\mathbf{J}$$

ただし, $\mathbf{J}$ は要素がすべて 1 の正行列である.

1.2 球状行列

帰無仮説「 $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$ 」を表す任意の $(p-1) \times p$ 正規直交対比行列 $\mathbf{C}$ に対して, 以下の条件を満たす共分散行列 $\mathbf{S}$ を球状行列 (spherical matrix) と言う.

$$\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C}' = \lambda\mathbf{I} \quad (\lambda > 0).$$

1.3 球面性の仮定

n 名の被験者がそれぞれ p 個の条件下で 1 度ずつ測定されている 1 つの被験者内要因デザインを考える. p 個の変数の母共分散行列 (population covariance matrix) を Σ とすると, 要因の主効果を検定する F 統計量が自由度 $(p-1)$, $(p-1)(n-1)$ の F 分布に従うための必要十分条件は, Σ が球状行列であることであり [3], これを「球面性の仮定 (sphericity condition)」と言う.

$$\text{球面性の仮定 } \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}' = \lambda\mathbf{I} \quad (\mathbf{C}: \text{orthonormal matrix}, \lambda > 0).$$

中心化した $n \times p$ のデータ行列を $\mathbf{X}$ とすると、 $\Sigma = E(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ なので、球面性の仮定は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}' &= \mathbf{C}E(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{C}' \\ &= E(\mathbf{C}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{C}') \\ &= E([\mathbf{X}\mathbf{C}']'[\mathbf{X}\mathbf{C}']) \\ &= \lambda\mathbf{I}.\end{aligned}$$

つまり、 $\mathbf{X}$ を正規直交対比行列 $\mathbf{C}$ で変換した $\mathbf{X}\mathbf{C}' = (\mathbf{X}c_1, \mathbf{X}c_2, \dots, \mathbf{X}c_{p-1})$ という $p-1$ 個の変数の母分散が等しく、かつ、互いに無相関であるというのが、球面性の仮定の意味するところである。

1.4 H 型行列

次の条件を満たす共分散行列 $\mathbf{H}$ を H 型行列 (type H matrix) と言う。

$$\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_{ij} = c,$$

ただし、 σ_i^2 は $\mathbf{H}$ の第 i 対角要素、 σ_{ij} は $\mathbf{H}$ の (i, j) 要素、 c は定数である。
ex)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_{ij}$ は 2 つの変数 i, j の差得点の分散であり、H 型行列は、任意の 2 変数の差得点の分散がすべて等しいということを意味している。

1.5 球面性の仮定の別解釈

1 つの被験者内要因デザインの場合、 Σ が球状行列であることと H 型行列であることは同値である [1]。つまり、「球面性の仮定」は「 $\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_{ij} = c$ (任意の 2 変数の差得点の分散がすべて等しい)」に置き換えられる。よって、任意の 2 変数の差得点の分散がすべて等しければ、球面性の仮定を満たし、要因の主効果を検定する F 統計量は F 分布に従う。

対応のない t 検定では、2 変数の母分散が等しいことが必要であった。また、対応のある t 検定は、2 変数の差得点という 1 変数の t 検定に帰着した。これらのアナロジーとして、水準が 3 以上である場合は、任意の 2 水準の差得点の分散がすべて等しければ F 検定できると理解することができる。

なお、被験者内要因が 2 つ以上ある場合は、1 つの要因については球面性の仮定を満たすが、要因全体としては H 型行列にならない共分散行列も許容される [2]。

1.6 複合対称行列

次の条件を満たす共分散行列 $\mathbf{M}$ を複合対称行列 (compound symmetry matrix) と言う.

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \sigma^2 \\ \sigma_{ij} &= \rho\sigma_{ij} .\end{aligned}$$

ただし, σ_i^2 は $\mathbf{M}$ の第 i 対角要素, σ_{ij} は $\mathbf{M}$ の (i, j) 要素である.
ex)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} .$$

複合対称行列は, 各変数の分散が等しく, かつ, 任意の 2 変数間の相関係数が等しい, つまり, 要因の各水準において分布の散らばりが等しく, かつ, 各水準において被験者効果の全体的傾向 (高い人は高い, 低い人は低い) は一定であるということを意味している.

行列 $\mathbf{M}$ が複合対称行列であれば, $\mathbf{M}$ は H 型行列である (H 型行列であれば必然的に球状行列であり, 球面性の仮定を満たす).

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_{ij} &= \sigma^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma^2 \\ &= 2\sigma^2(1 - \rho) \\ &= c .\end{aligned}$$

References

- [1] Huynh, H., & Feldt, L. S. (1970). Conditions under which mean square ratios in repeated measurements designs have exact F-distributions. *Journal of the American Statistical Association*, **65**, 1582-1585.
- [2] Mendoza, J. L., Toothaker, L. E., & CrainSource, B. R. (1976). Necessary and sufficient conditions for F ratios in the $L \times J \times K$ factorial design with two repeated factors. *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 992-993.
- [3] Rouanet, H., & Lepine D. (1970). Comparison between treatments in a repeated measures design: ANOVA and multivariate methods. *The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **23**, 147-163.