1　級内相関係数

1.1　データ行列

n 名の受検者が k 通りの評定を受けるとする（n 名の受検者を k 人の評価者が評価する）.

		raters					mean of
		1	$\cdots$	j	$\cdots$	k	each subject
	1	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1k}	$\bar{x}_1$
	2	x_{21}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2k}	$\bar{x}_2$
subjects	$\vdots$						$\vdots$
	i	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{ik}	$\bar{x}_i$
	$\vdots$						$\vdots$
	n	x_{n1}	$\cdots$	x_{nj}	$\cdots$	x_{nk}	$\bar{x}_n$
mean of each rater		$\bar{v}_1$	$\cdots$	$\bar{v}_j$	$\cdots$	$\bar{v}_k$	$\bar{u}$

1.2　Case 1

評定者の効果は考えない（誤差に含める）モデル.

1 要因変量モデルで表される．受検者 i の評定 j のデータを x_{ij}，全平均を μ（定数），受検者効果（被験者間要因）を表すパラメタを b_i（平均 0，分散 σ_b^2 の確率変数），誤差を e_{ij}（平均 0，分散 σ_{e1}^2 の確率変数）とする．モデル及び分散は次のようになる．

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{モデル} & x_{ij} & = & \mu + b_i + e_{ij} \\
\text{分散} & \sigma_x^2 & = & \sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2
\end{array}
$$

平方和の分割

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{u})^2 & = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 \\
SST & = & SSB \quad + \quad SSE_1
\end{array}
$$

平方和，平均平方，平均平方の期待値

$$
\begin{array}{lll}
SST = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{u})^2 & & \\
SSB = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2, & MSB = \frac{SSB}{n-1}, & E(MSB) = k\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2 \\
SSE_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2, & MSE_1 = \frac{SSE_1}{n(k-1)}, & E(MSE_1) = \sigma_{e1}^2
\end{array}
$$

級内相関係数

$$\rho_1 = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2}$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{MSB - MSE_1}{MSB + (k-1)MSE_1}$$

1.3　Case 1k

評定者の効果は考えない（誤差に含める）モデルにおける，k 回評定の平均値の信頼性.

$$\begin{array}{lrcl} \text{モデル} & \bar{x}_i & = & \mu + b_i + \bar{e}_i \\ \text{分散} & \sigma^2_{\bar{x}} & = & \sigma^2_b + \sigma^2_{e1}/k \end{array}$$

平方和，平均平方，平均平方の期待値は case 1 に等しい.
級内相関係数

$$\rho_{1k} = \frac{\sigma^2_b}{\sigma^2_b + \sigma^2_{e1}/k}$$

$$\hat{\rho}_{1k} = \frac{MSB - MSE_1}{MSB}$$

1.4　Case 2

評定者の効果を変量効果と捉えるモデル.

2 要因変量モデルで表される．評定者効果（被験者内要因）を表すパラメタを w_j（平均 0，分散 σ^2_{w2} の確率変数），誤差を e_{ij}（平均 0，分散 σ^2_{e2} の確率変数）とする.

なお，交互作用も入れたモデルを立てている研究もあるが，同一評定の繰り返しが 1 回では誤差と分離できないので，ここでは交互作用項を入れた議論はしない.

$$\begin{array}{lrcl} \text{モデル} & x_{ij} & = & \mu + b_i + w_j + e_{ij} \\ \text{分散} & \sigma^2_x & = & \sigma^2_b + \sigma^2_{w2} + \sigma^2_{e2} \end{array}$$

平方和の分割

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{u})^2 & = & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{u})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{v}_j - \bar{u})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{v}_j + \bar{u})^2 \\ SST & = & SSB \quad + \quad SSW_2 \quad + \quad SSE_2 \end{array}$$

平方和，平均平方，平均平方の期待値

$$\begin{array}{lll} SST = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{u})^2 & & \\ SSB = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{u})^2, & MSB = \dfrac{SSB}{n-1}, & E(MSB) = k\sigma^2_b + \sigma^2_{e2} \\ SSW_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{v}_j - \bar{u})^2, & MSW_2 = \dfrac{SSW_2}{k-1}, & E(MSW_2) = n\sigma^2_{w2} + \sigma^2_{e2} \\ SSE_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{v}_j + \bar{u})^2, & MSE_2 = \dfrac{SSE_2}{(n-1)(k-1)}, & E(MSE_2) = \sigma^2_{e2} \end{array}$$

級内相関係数

$$\rho_2 = \frac{\sigma^2_b}{\sigma^2_b + \sigma^2_{w2} + \sigma^2_{e2}}$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{MSB - MSE_2}{MSB + (k-1)MSE_2 + k(MSW_2 - MSE_2)/n}$$

1.5 Case 2k

評定者の効果を変量効果と捉えるモデルにおける，k 回評定の平均値の信頼性.

$$
\begin{aligned}
\text{モデル} \quad \bar{x}_i &= \mu + b_i + \bar{w} + \bar{e}_i \\
\text{分散} \quad \sigma_{\bar{x}}^2 &= \sigma_b^2 + \sigma_{w2}^2/k + \sigma_{e2}^2/k
\end{aligned}
$$

平方和，平均平方，平均平方の期待値は case 2 に等しい.
級内相関係数

$$
\begin{aligned}
\rho_{2k} &= \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + (\sigma_{w2}^2 + \sigma_{e2}^2)/k} \\
\hat{\rho}_{2k} &= \frac{MSB - MSE_2}{MSB + (MSW_2 - MSE_2)/n}
\end{aligned}
$$

1.6 Case 3

評定者の効果を固定効果と捉えるモデル.

2 要因混合モデルで表される．評定者効果（被験者内要因）を表すパラメタを w_j（平均 0，分散 σ_{w3}^2 の定数），誤差を e_{ij}（平均 0，分散 σ_{e3}^2 の確率変数）とする.

$$
\begin{aligned}
\text{モデル} \quad x_{ij} &= \mu + b_i + w_j + e_{ij} \\
\text{分散} \quad \sigma_x^2 &= \sigma_b^2 + \sigma_{w3}^2 + \sigma_{e3}^2
\end{aligned}
$$

平方和の分割（case 2 と同じである）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{u})^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{u})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{v}_j - \bar{u})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{v}_j + \bar{u})^2 \\
SST &= SSB \quad + \quad SSW_3 \quad + \quad SSE_3
\end{aligned}
$$

平方和，平均平方，平均平方の期待値（case 2 と同じである）

$$
\begin{aligned}
SST &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{u})^2 \\
SSB &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i - \bar{u})^2, & MSB &= \frac{SSB}{n-1}, & E(MSB) &= k\sigma_b^2 + \sigma_{e3}^2 \\
SSW_3 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{v}_j - \bar{u})^2, & MSW_3 &= \frac{SSW_3}{k-1}, & E(MSW_3) &= n\sigma_{w3}^2 + \sigma_{e3}^2 \\
SSE_3 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{v}_j + \bar{u})^2, & MSE_3 &= \frac{SSE_3}{(n-1)(k-1)}, & E(MSE_3) &= \sigma_{e3}^2
\end{aligned}
$$

級内相関係数

$$
\begin{aligned}
\rho_3 &= \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e3}^2} \\
\hat{\rho}_3 &= \frac{MSB - MSE_3}{MSB + (k-1)MSE_3}
\end{aligned}
$$

これは case 2 と異なる．式は case 1 と同様であるが，MSE の計算式が異なるので，一般に case 1 とは異なった値となる.

1.7 Case 3k

評定者の効果を固定効果と捉えるモデルにおける，k 回評定の平均値の信頼性.

$$\begin{array}{lrcl} \text{モデル} & \bar{x}_i & = & \mu + b_i + (\bar{w} = 0) + \bar{e}_i \\ \text{分散} & \sigma_{\bar{x}}^2 & = & \sigma_b^2 + \sigma_{e3}^2/k \end{array}$$

平方和，平方和，平均平方，平均平方の期待値は case 3 に等しい.
級内相関係数

$$\begin{aligned} \rho_{3k} &= \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e3}^2/k} \\ \hat{\rho}_{3k} &= \frac{MSB - MSE_3}{MSB} \end{aligned}$$

1.8 ρ と ρ_k の関係

Case 1 と case 1k について，$k\rho_1$ 及び $1 + (k-1)\rho_1$ を計算すると，

$$\begin{aligned} k\rho_1 &= \frac{k\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2} \\ 1 + (k-1)\rho_1 &= \frac{\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2 + (k-1)\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2} \\ &= \frac{k\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \frac{k\rho_1}{1 + (k-1)\rho_1} &= \frac{k\sigma_b^2}{k\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2} \\ &= \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{e1}^2/k} \\ &= \rho_{1k} \end{aligned}$$

同様にして，case 3 と case 3k についても，

$$\frac{k\rho_3}{1 + (k-1)\rho_3} = \rho_{3k}$$

を得る．また，case 2 と case 2k について，$k\rho_2$ 及び $1 + (k-1)\rho_2$ を計算すると，

$$\begin{aligned} k\rho_2 &= \frac{k\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{w2}^2 + \sigma_{e2}^2} \\ 1 + (k-1)\rho_2 &= \frac{\sigma_b^2 + \sigma_{w2}^2 + \sigma_{e2}^2 + (k-1)\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{w2}^2 + \sigma_{e2}^2} \\ &= \frac{k\sigma_b^2 + \sigma_{w2}^2 + \sigma_{e2}^2}{\sigma_b^2 + \sigma_{w2}^2 + \sigma_{e2}^2} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
\frac{k\rho_2}{1+(k-1)\rho_2} &= \frac{k\sigma_b^2}{k\sigma_b^2+\sigma_{w2}^2+\sigma_{e2}^2} \\
&= \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2+(\sigma_{w2}^2+\sigma_{e2}^2)/k} \\
&= \rho_{2k}
\end{aligned}$$

以上より，いずれの case においても，

$$\rho_k = \frac{k\rho}{1+(k-1)\rho}$$

という関係が成立していることがわかる．推定値についても，同様にして，

$$\hat{\rho}_k = \frac{k\hat{\rho}}{1+(k-1)\hat{\rho}}$$

となる．

級内相関係数を項目間相関係数（すべて等しいと仮定：強平行測定）にしたものが，スピアマン・ブラウンの公式である．

1.9 級内相関係数とアルファ係数

$\hat{\rho}_{3k}$ はクロンバックの α 係数に等しい（弱平行測定）．

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{3k} &= \frac{MSB-MSE_3}{MSB} \\
&= \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{v}_j+\bar{u})^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2} \\
&= \frac{\frac{k}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[(x_{ij}-\bar{v}_j)-(\bar{x}_i-\bar{u})\right]^2}{\frac{k}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2} \\
&= \frac{\frac{k}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[(x_{ij}-\bar{v}_j)^2+(\bar{x}_i-\bar{u})^2-2(x_{ij}-\bar{v}_j)(\bar{x}_i-\bar{u})\right]}{\frac{k}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2} \\
&= \frac{\frac{k}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2+k(\bar{x}_i-\bar{u})^2-2k(\bar{x}_i-\bar{u})^2\right]}{\frac{k}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{k^2}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\dfrac{k}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2-k(\bar{x}_i-\bar{u})^2\right]}{\dfrac{k^2}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_i-\bar{u})^2} \\
&= \frac{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2-\dfrac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k}k(x_{ij}-\bar{v}_j)^2-(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2\right]}{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2} \\
&= \frac{\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2-\dfrac{k}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2}{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2} \\
&= \frac{k}{k-1}\,\frac{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2-\sum_{j=1}^{k}\left[\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right]}{\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2} \\
&= \frac{k}{k-1}\,\frac{s_t^2-\displaystyle\sum_{j=1}^{k}s_i^2}{s_t^2} \\
&= \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{k}s_i^2}{s_t^2}\right) \\
&= \alpha
\end{aligned}
$$

ここで，s_t^2 は合計得点の分散，s_i^2 は項目得点の分散を表す．平均値の信頼性と合計得点の信頼性は等しいことが分かる．

また，

$$\hat{\rho}_{3k} = \frac{k\hat{\rho}_3}{1+(k-1)\hat{\rho}_3}$$

であったから，

$$\alpha = \frac{k\hat{\rho}_3}{1+(k-1)\hat{\rho}_3}$$

という，アルファ係数と級内相関係数との関係を得る．右辺は，$0<\rho<1$ のとき，k に関して単調増加関数であるから，一般に項目数が多いほどアルファ係数は大きくなることが理解される，

1.10 級内相関係数と言われる所以

Case 3 の $\hat{\rho}$ について考える．分子は次のようになる．

$MSB-MSE_3$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{v}_j+\bar{u})^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[(k-1)(\bar{x}_i-\bar{u})^2-((x_{ij}-\bar{v}_j)-(\bar{x}_i-\bar{u}))^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[(k-1)(\bar{x}_i-\bar{u})^2-(\bar{x}_i-\bar{u})^2+2(x_{ij}-\bar{v}_j)(\bar{x}_i-\bar{u})-(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[k(k-1)(\bar{x}_i-\bar{u})^2-k(\bar{x}_i-\bar{u})^2+2k(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[k^2(\bar{x}_i-\bar{u})^2-\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[(k\bar{x}_i-k\bar{u})^2-\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)\right)^2-\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&= \frac{1}{(n-1)(k-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{j'\neq j'}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)(x_{ij'}-\bar{v}_j) \\
&= \frac{k}{k(k-1)}\sum_{j=1}^{k}\sum_{j'\neq j'}^{k}s_{jj'}
\end{aligned}
$$

分母は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
&MSB+(k-1)MSE_3 \\
&\quad= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_i-\bar{v}_j+\bar{u})^2 \\
&\quad= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[(\bar{x}_i-\bar{u})^2+((x_{ij}-\bar{v}_j)-(\bar{x}_i-\bar{u}))^2\right] \\
&\quad= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left[(\bar{x}_i-\bar{u})^2+(\bar{x}_i-\bar{u})^2-2(\bar{x}_i-\bar{u})(x_{ij}-\bar{v}_j)+(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&\quad= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[2\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_i-\bar{u})^2-2(\bar{x}_i-\bar{u})\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)+\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&\quad= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[2k(\bar{x}_i-\bar{u})^2-2k(\bar{x}_i-\bar{u})^2+\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2\right] \\
&\quad= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{v}_j)^2 \\
&\quad= \sum_{j=1}^{k}s_j^2
\end{aligned}
$$

これらから $\hat{\rho}_3$ は,

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}_3 &= \frac{MSB - MSE_3}{MSB + (k-1)MSE_3} \\
&= \frac{\dfrac{k}{k(k-1)} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sum_{j' \neq j'}^{k} s_{jj'}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} s_j^2} \\
&= \frac{\dfrac{1}{k(k-1)} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sum_{j' \neq j'}^{k} s_{jj'}}{\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} s_j^2} \\
&= \frac{\dfrac{1}{k(k-1)} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \sum_{j' \neq j'}^{k} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{v}_j)(x_{ij'} - \bar{v}_j) \right)}{\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{v}_j)^2 \right)}
\end{aligned}
$$

となる．$s_{jj'}$ および s_j^2 を求める式において，各評定者における平均 $\bar{v}_j$ を全体平均 $\bar{u}$ に置き換えれば，$\hat{\rho}_3$ は一卵性多生児などのデータにおける級内相関係数に一致する．この形式上の類似性から，ρ_3 なども級内相関係数と呼ばれる．なお，受検者数 n を大きくしても，一般に $\bar{v}_j$ は $\bar{u}$ に収束しないから，n を大きくしても，$\hat{\rho}_3$ はいわゆる級内相関係数には収束しない．

References

[1] Bartko, J. (1976). On various intraclass correlation reliability coefficients. *Psychological Bulletin*, **83**, 762-765.

[2] McGraw, K. O., & Wong, S. P. (1996). Forming inferences about some intraclass correlation coefficients. *Psychological Methods*, **1**, 30-46.

[3] Shrout, P. E., & Fleiss, J. L. (1979). Intraclass correlations: Uses in assessing reliability. *Psychological Bulletin*, **86**, 420-428.